



Universität  
franco-allemande  
Deutsch-Französische  
Hochschule

## Entanglement and Quantumness - New Numerical Approaches -

Le thème central de cette thèse cumulative est l'étude de l'intrication multi-partite quantique pour des systèmes de dimension finie. Nous avons développé un algorithme numérique basé sur un problème d'optimisation semi-définie, qui permet de décider si un état est intriqué ou pas en un nombre fini d'itérations. Cet algorithme est une extension d'algorithmes déjà connus qui ne permettent pas de conclure lorsque l'état en question est séparable. Dans notre cas, si l'état est séparable, l'algorithme permet d'obtenir une décomposition de l'état en une mixture d'états séparables. Ces résultats ont été obtenus en exploitant la correspondance entre le problème de l'intrication et le problème des moments tronqués (truncated moment problem). Nous avons aussi développé une nouvelle manière d'exprimer l'état partiellement transposé d'un état symétrique de plusieurs qubits, simplifiant par la-même nombre de résultats bien connus en théorie de l'intrication. Cette nouvelle manière d'écrire le critère de transposée partielle unifie différentes interprétations et formulations alternatives dudit critère, et fait partie intégrante de notre algorithme d'optimisation semi-définie.

Nous avons aussi étudié en détails les propriétés géométriques des états intriqués de deux qubits : nous avons pu répondre à la question de savoir à quelle distance un état pur est de l'enveloppe convexe des états symétriques et séparables, en donnant une formule explicite de l'état symétrique et séparable le plus proche — la distance étant celle de Hilbert-Schmidt. Pour les états mixtes nous avons pu obtenir et une borne supérieure numérique et une borne inférieure analytique pour cette distance. Pour un plus grand nombre de qubits, nous nous sommes intéressés à la boule des états absolument classique, c'est à dire des états symétriques de plusieurs qubits qui restent séparables sous n'importe quelle transformation unitaire. Nous avons trouvé une borne inférieure analytique pour le rayon de cette boule autour de l'état maximallement mixte ainsi qu'une borne supérieure numérique, cette dernière ayant été obtenue en cherchant un état intriqué aussi proche que possible de l'état maximallement mixte.

La représentation tensorielle d'un état symétrique de plusieurs qubits, autrement dit de l'état d'un spin  $j$ , nous a permis d'étudier des propriétés de l'intrication en nous basant sur le spectre du tenseur (valeurs propres du tenseur). Le caractère défini du tenseur est relié à l'intrication de l'état qu'il représente, donnant la possibilité de détecter la présence d'intrication à l'aide de la valeur propre minimale du tenseur. Toutefois, les valeurs propres du tenseur sont autrement plus compliquée à calculer que les valeurs propres matricielle, rendant l'analyse numérique plus délicate. La relation entre la valeur propre minimale du tenseur et la quantité d'intrication présente dans l'état a aussi été étudiée. Il en ressort que les deux quantités sont étroitement corrélées pour des systèmes de petite

taille, c'est à dire jusqu'à six qubits. L'étude de ces corrélations a nécessité une méthode indépendante pour jauger de la quantité d'intrication présente dans un état. Pour cela nous avons amélioré des méthodes numériques pour déterminer la distance entre un état et l'ensemble composé des états symétriques et séparables, en utilisant une combinaison d'algorithmes d'optimisation quadratique et d'optimisation linéaire. La représentation tensorielle des états symétriques de plusieurs qubits a aussi été utilisée pour définir formellement une nouvelle classe de tenseurs, appelés "regularly decomposable tensors", qui correspond à l'ensemble des états symétriques et séparables de plusieurs qubits.