Université franco-allemande
Deutsch-Französische Hochschule

Processus aléatoires à valeurs dans les arbres algébriques et hiérarchiques

Cette thèse a pour objet l'étude de processus stochastiques à valeurs arbres qui modélisent les relations généalogiques au sein d'une population. Le premier chapitre est consacré à la limite infinie du modèle alpha introduit par D. Ford. Il s'agit d'une famille à un paramètre d'arbres binaires aléatoires avec un nombre fini de feuilles, qui interpole l'arbre coalescent (aussi connu sous le nom d'arbre de Yule) et l'arbre de branchement (également connu sous le nom d'arbre uniforme). Pour construire les modèles alpha de Ford avec un nombre infini de feuilles, ils sont vus comme des variables aléatoires prenant leurs valeurs dans l'espace des arbres algébriques binaires mesurés introduits par W. Löhr et A. Winter. Nous montrons que les modèles alpha de Ford convergent en distribution dans cet espace lorsqu'il est muni de la convergence des formes des sous-arbres échantillonnés. Nous déterminons ensuite la loi de distribution des masses des sous-arbres autour des points d'embranchement dans le cas particulier de l'arbre algébrique mesuré de Kingman. Nous introduisons également, via un problème de martingale bien posé, la diffusion alpha de Ford qui généralise la diffusion d'Aldous construite par W. Löhr, L. Mytnik et A. Winter. Enfin, en utilisant le fait que l'arbre alpha de Ford avec un nombre infini de feuilles est une distribution invariante de la diffusion alpha de Ford, nous donnons une description complète de la loi de distribution des masses des sous-arbres autour des points d'embranchement pour tout arbre alpha Ford.
Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la version à deux niveaux de deux dynamiques de rééchantillonnage sur des espaces d'arbres introduites par A. Greven, P. Pfaffelhuber et A. Winter. Nous construisons d'abord le modèle de Moran à valeurs arbres à deux niveaux comme un processus stochastique à valeurs dans l'espace des espaces (ultra-)métriques mesurés à deux niveaux, muni de la topologie faible-Gromov à deux niveaux, définie par R. Meizis. Dans ce modèle, une population finie de parasites divisée en un nombre fini d'hôtes évolue lors d'événements de naissance-mort, à la fois au niveau des parasites et des hôtes. Nous montrons que les opérateurs de ces processus convergent uniformément lorsque les nombres d'hôtes et de parasites tendent tous les deux vers l'infini, et que le problème de martingale associé à l'opérateur limite est bien posé. L'unicité de la solution se montre par un résultat de dualité au coalescent de Kingman à deux niveaux. Nous appelons la solution du problème de martingale le processus de Fleming-Viot à valeurs arbres à deux niveaux. Enfin, nous donnons des formules décrivant l'évolution des longueurs des sous-arbres échantillonnés sous cette dynamique.
Le dernier chapitre est consacré à l'espace des arbres algébriques mesurés à deux niveaux, qui sont les analogues à deux niveaux des arbres algébriques mesures introduits par W. Löhr et A. Winter. En associant chaque arbre algébrique (mesuré à deux niveaux) à l'espace métrique (mesuré à deux niveaux) donné par la distance provenant de la distribution des points de branchement, nous utilisons la topologie faible-Gromov à deux niveaux pour définir une topologie métrisable. Sur le sous-espace des arbres binaires, nous introduisons également une topologie plus naturelle appelée convergence des formes des sous-arbres échantillonnés à deux niveaux. Nous encodons les arbres algébriques binaires mesurés à deux niveaux par un couple formé d'une triangulation du cercle et d'une mesure aléatoire sur le cercle, ce qui nous permet de montrer que les deux notions de topologies sur l'espace des arbres algébriques binaires mesurés à deux niveaux sont équivalentes et compactes. Nous terminons le chapitre par la construction de l'arbre algébrique mesuré aléatoire à deux niveaux correspondant au coalescent de Kingman imbriqué.