Université franco-allemande Deutsch-Französische Hochschule

Stochastisches Modell für kollektive Bewegung von Populationen

Laure Pédèches

In dieser Doktorarbeit befassen wir uns mit stochastischen Systemen, die eines der mysteriösesten biologischen Phänomene als Modell darstellen: die *kollektive Bewegung von Gemeinschaften*. Diese werden bei Vögel- und Fischschwärmen, aber auch bei manchen Bakterien, Viehherden oder gar bei Menschen beobachtet. Dieser Verhaltenstyp spielt ebenfalls in anderen Bereichen wie Finanzwesen, Linguistik oder auch Robotik eine Rolle.

Wir nehmen uns der Dynamik einer *Gruppe von N Individuen*, insbesondere *zweier asymptotischen Verhaltenstypen* an. Einerseits befassen wir uns mit den Eigenschaften de *Ergodizität in Langzeit*: Existenz einer invarianten Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Ljapunow-Funktionen, und Konvergenzrate der Übergangshalbgruppe gegen diese Wahrscheinlichkeit. Eine ebenfalls zentrale Thematik unserer Forschung ist der Begriff *Flocking*: es wird damit definiert, dass eine Gruppe von Individuen einen dynamischen Konsens ohne hierarchische Struktur erreichen kann; mathematisch gesehen entspricht dies der Aneinanderreihung der Geschwindigkeiten und dem Zusammenkommen des Schwarmes. Andererseits gehen wir das Phänomen der *"Propagation of Chaos"* an, wenn die Anzahl N der Teilchen ins Unendliche tendiert: die Bewegungen der jeweiligen Individuen werden asymptotisch unabhängig.

Unser Ausgangspunkt ist das *Cucker-Smale-Modell*, ein deterministisches kinetisches Molekular-Modell für eine Gruppe ohne hierarchische Struktur. Die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen variiert gemäß deren "Kommunikationsrate", die wiederum von deren relativen Entfernung abhängt und polynomisch abnimmt.

Im ersten Kapitel adressieren wir das asymptotische Verhalten eines Cucker-Smale-Modells mit Rauschstörung und dessen Varianten.

Kapitel 2 stellt mehrere Definitionen des Flockings in einem Zufallsrahmen dar: diverse stochastische Systeme, die verschiedenen Rauschformen entsprechen (die eine gestörte Umgebung, den "freien Willen" des jeweiligen Individuums oder eine unterbrochene Übertragung suggerieren) werden im Zusammenhang mit diesen Begriffen unter die Lupe genommen.

Das dritte Kapitel basiert auf der *"Cluster Expansion"-Methode* aus der statistischen Mechanik. Wir beweisen die exponentielle Ergodizität von gewissen nicht-Markow-Prozessen mit nicht-glattem Drift und wenden diese Ergebnisse auf Störungen des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses an.

Im letzten Teil, nehmen wir uns der *zweidimensionalen parabolisch-elliptischen Gleichung von Keller-Segel* an. Wir beweisen die Existenz einer Lösung, welche in gewisser Hinsicht einzig ist, indem wir, mittels Vergleich mit Bessel-Prozessen und der Dirichlet Formtheorie, mögliche Stoßtypen zwischen den Teilchen ermitteln.