

Modèles stochastiques pour des mouvements collectifs de populations

Laure Pédèches

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des systèmes stochastiques modélisant un des phénomènes biologiques les plus mystérieux, les *mouvements collectifs de populations*. On les observe lors de vols d'oiseaux et au sein de bancs de poissons, mais aussi chez certaines populations de bactéries, troupeaux de bétail ou encore pour des populations humaines. Ce genre de comportements apparaît également dans de nombreux autres domaines tels que la finance, la linguistique ou encore la robotique.

Nous étudions la dynamique d'un *groupe de N individus*, et plus particulièrement deux types de *comportements asymptotiques*.

D'une part, nous nous intéressons aux *propriétés d'ergodicité en temps long* : existence d'une probabilité invariante via des fonctionnelles de Lyapunov, vitesse de convergence du semi-groupe de transition vers cette probabilité. Également au centre de nos recherches la notion de *flocking* : on la définit comme le fait qu'un ensemble d'individus atteigne un consensus en l'absence d'une structure hiérarchique ; d'un point de vue mathématique, cela correspond à l'alignement des vitesses et au regroupement des individus en essaim. D'autre part, nous étudions le phénomène de *propagation du chaos* quand le nombre de particules N tend vers l'infini : les dynamiques des différents individus deviennent asymptotiquement indépendantes.

Le *modèle de Cucker-Smale*, un modèle déterministe cinétique de champ moyen pour une population sans structure hiérarchique, est notre point de départ. L'interaction entre deux particules varie selon leur "taux de communication", qui dépend de leur distance relative et décroît polynomialement.

Dans le premier chapitre, nous étudions les comportements asymptotiques d'un modèle de Cucker-Smale avec perturbation stochastique et de certaines de ces variantes.

Le chapitre 2 présente plusieurs définitions du flocking dans un cadre aléatoire : diverses dynamiques stochastiques, correspondant à différentes formes de bruit – évoquant par exemple un environnement perturbé, le "libre-arbitre" de chaque individu ou une transmission brouillée – sont reprises et étudiées en conjonction avec ces notions.

Le troisième chapitre est basé sur la *méthode de développement en amas*, outil issu de la mécanique statistique. Nous prouvons l'ergodicité exponentielle de certains processus non-markoviens à dérive non-régulière, et nous appliquons ces résultats à des perturbations du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Dans la dernière partie, nous nous intéressons à l'*équation parabolique-elliptique en dimension 2 de Keller-Segel*, et en particulier au système de particules en champ moyen que l'on peut en dériver. Nous démontrons l'existence d'une solution, unique dans un certain sens, en déterminant les types de collisions possibles entre les particules, grâce à des comparaisons avec des processus de Bessel et à la théorie des formes de Dirichlet.