Université franco-allemande
Deutsch-Französische Hochschule

Nicht-kommutative Verallgemeinerung probabilistischer Ergebnisse aus der Darstellungstheorie

Pierre Tarrago

In dieser Dissertation widme ich mich der nicht-kommutativen Verallgemeinerung probabilistischer Ergebnisse aus der Darstellungstheorie. Die Dissertation besteht aus einer Einleitung und drei Teilen, die jeweils separate Veröffentlichungen darstellen.

Easy Quantengruppen und Weingarten-Kalkül: In mehreren Fällen besitzen orthogonale Gruppen und Quantengruppen eine ähnliche Darstellungstheorie, deren kombinatorische Struktur mit Hilfe von mengentheoretischen Partitionen beschrieben wird: zum Beispiel gilt dies für die symmetrische Gruppe und die orthogonale Gruppe sowie für die freie symmetrische Quantengruppe und die freie orthogonale Quantengruppe, wobei letzteren als nicht-kommutative Verallgemeinerung von ersteren von Wang [13, 14] definiert wurden. In [3] wurden easy Quantengruppen von Banica und Speicher zur Systematisierung dieses Phänomens eingeführt. Im Rahmen der easy Quantengruppen gibt es zwei extreme Situationen: diejenige, in der die easy Quantengruppe eine klassische Gruppe ist und diejenige, in der die Darstellungstheorie der easy Quantengruppe mit Hilfe von nicht-kreuzenden Partitionen beschrieben wird. In letzterem Fall wird die easy Quantengruppe frei genannt. Zuerst wurde die Klassifikation aller klassischen und aller freien Quantengruppen von Banica, Speicher und Weber[3, 15] durchgeführt und dann auf alle easy Quantengruppen von Raum und Weber [10] ausgedehnt.
Für eine easy Quantengruppe existiert eine effiziente Methode, die Weingarten-Kalkül genannt wird [5], um Integrale bezüglich des Haarmaßes zu berechnen. Mit dem Weingarten-Kalkül konnten Banica, Curran und Speicher [2] mehrere probabilistische Ergebnisse im Rahmen der easy Quantengruppen erlangen: insbesondere wurde der Grenzwertsatz von Diaconis und Shahshahani [6] bezüglich der Verteilung des fundamentalen Charakters der symmetrischen und orthogonalen Gruppen auf alle klassischen und freien easy Quantengruppen ausgedehnt.
In dem ersten Teil der Dissertation wird der Begriff von easy Quantengruppe im unitären Fall untersucht. Es wird eine Klassifikation aller unitären easy Quantengruppen in dem

klassischen und freien unitären Fall gegeben. Des Weiteren werden die probabilistischen Ergebnisse von Banica, Curran und SPeicher [2] auf den unitären Fall ausgedehnt.

Freies Kranzprodukt: Das freie Kranzprodukt ist eine von Bichon [4] eingeführte nichtkommutative Version des klassischen Kranzprodukts, mit Hilfe dessen eine neue Quantengruppe aus einer kompakten Quantengruppe und einer Untergruppe der freien symmetrischen Quantengruppe erzeugt wird. Während das Haarmaß für ein klassisches Kranzprodukt eine einfache Gestalt hat, gibt es für das Haarmaß eines freien Kranzprodukts keine explizite Formulierung. Banica und Bichon [1] stellten jedoch die Vermutung auf, dass die Verteilung des fundamentalen Charakters eines freien Kranzprodukts in vielen Fällen die multiplikative freie Faltung der Verteilungen der beiden originären Charaktere ist.
In dem zweiten Teil der Dissertation widme ich mich zunächst dem freien Kranzprodukt einer kompakten Quantengruppe mit der freien symmetrischen Gruppe. Die Darstellungstheorie solcher Kranzprodukte wird beschrieben, und verschiedene probabilistische Ergebnisse werden aus dieser Beschreibung gezogen. Dann wird eine Beziehung zwischen freien Kranzprodukten und planaren Algebren hergestellt, die zu dem Beweis der Vermutung von Banica und Bichon führt.

Martin Rand des Graphs Z: Der Young-Graph Y beschreibt die multiplikative Struktur des Rings der symmetrischen Funktionen in der sogenannten Schur-Basis [11, 12, 9]. Dieser Ring ist der universelle kommutative Ring mit abzählbar unendlich vielen Variablen, der eine große Rolle in der Darstellungstheorie der symmetrischen und unitären Gruppen spielt. Wenn man die Kommutativität der Variablen wegfallen lasst, erhält man einen neuen Ring, der der Ring der nicht-kommutativen symmetrischen Funktionen genannt wird [7]. Der Punkt ist, dass man daraus trotzdem einen kommutativen Ring erzeugen kann, der ähnlich dem Ring der symmetrischen Funktionen ähnlich ist. Insbesondere gibt es in diesem neuen Ring ein Gegenstück der Schur-Basis, das die fundamentale quasi-symmetrische Basis genannt wird.
In dem dritten Teil dieser Dissertation wird der Graph Z der Multiplikation dieser fundamentalen quasi-symmetrischen Basis untergesucht. Der minimale Rand dieses Graphs wurde schon von Gnedin und Olshanski identifiziert [8]. Wir beweisen jedoch, dass der minimale Rand und der Martin Rand gleich sind. Als Nebenprodukt des Beweises erhalten wir mehrere asymptotische kombinatorische Ergebnisse bezüglich großer ribbon Young-Tableaus.

Referenzen:

[1] Teodor Banica and Julien Bichon. Free product formulae for quantum permutation groups. Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 6(03):381–414, 2007.

[2] Teodor Banica, Stephen Curran, and Roland Speicher. Stochastic aspects of easy quantum groups. Probability theory and related fields, 149(3-4):435–462, 2011.

[3] Teodor Banica and Roland Speicher. Liberation of orthogonal lie groups. Advances in Mathematics, 222(4):1461–1501, 2009.

[4] Julien Bichon. Free wreath product by the quantum permutation group. Algebras and representation theory, 7(4):343–362, 2004.

[5] Benoˆıt Collins. Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the itzykson-zuber integral, and free probability. International Mathematics Research Notices, 2003(17):953–982, 2003.

[6] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. On the eigenvalues of random matrices. Journal of Applied Probability, pages 49–62, 1994.

[7] Israel Gelfand, Daniel Krob, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Vladimir S Retakh, and J-Y Thibon. Noncommutative symmetric functions. arXiv preprint hep-th/9407124, 1994.

[8] Alexander Gnedin and Grigori Olshanski. Coherent permutations with descent statistic and the boundary problem for the graph of zigzag diagrams. International Mathematics Research Notices, 2006:51968, 2006.

[9] Sergei Kerov. The boundary of young lattice and random young tableaux. DIMACS Ser. Discr. Math. Theor. Comp. Sci, 24:133–158, 1996.

[10] Sven Raum and Moritz Weber. The full classification of orthogonal easy quantum groups. arXiv preprint arXiv:1312.3857, 2013.

[11] Elmar Thoma. Die unzerlegbaren, positiv-definiten klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen gruppe. Mathematische Zeitschrift, 85(1):40–61, 1964.

[12] Anatolii Vershik and Sergei Kerov. Asymptotic theory of characters of the symmetric group. Functional analysis and its applications, 15(4):246–255, 1981.

[13] Shuzhou Wang. Free products of compact quantum groups. Communications in Mathematical Physics, 167(3):671–692, 1995.

[14] Shuzhou Wang. Quantum symmetry groups of finite spaces. Communications in mathematical physics, 195(1):195–211, 1998.

[15] Moritz Weber. On the classification of easy quantum groups. Advances in Mathematics, 245:500–533, 2013.