



Généralisation non-commutative de résultats probabilistes issus de la théorie des représentations

Pierre Tarago

Le sujet de cette thèse est la généralisation non-commutative de résultats probabilistes venant de la théorie des représentations. Les résultats obtenus se divisent en trois parties qui sont résumées ici.

Groupes quantiques easy et calcul de Weingarten: La théorie des représentations de certains groupes et groupes quantiques orthogonaux compacts mettent en jeu un même objet combinatoire, les partitions d'ensembles finis. Ceci est le cas pour le groupe orthogonal et le groupe symétrique, ainsi que pour le groupe orthogonal libre et le groupe symétrique libre: ces deux derniers sont des groupes quantiques qui ont été introduits par Wang [13, 14] comme version non-commutative de leur homologue classique. Banica et Speicher ont généralisé ces exemples en définissant les groupes quantiques easy. Il y a dans cette classe deux situations extrêmes: celle où le groupe quantique est un groupe classique et celle où la théorie des représentations du groupe est décrite par des partitions non-croisées. Dans ce dernier cas, le groupe quantique est dit libre. La classification de tous les groupes quantiques easy orthogonaux dans le cas classique et libre a été initiée par Banica et Speicher, puis complétée par Weber [3, 15]. Dans un troisième temps, Raum et Weber [10] ont réussi à classifier l'ensemble des groupes quantiques easy orthogonaux. Pour un tel groupe quantique, le calcul de Weingarten [5] donne un moyen efficace de calculer les intégrales par rapport à l'état de Haar. Avec l'aide du calcul de Weingarten, Banica, Curran et Speicher [2] ont pu obtenir plusieurs résultats probabilistes dans le cas des groupes quantiques easy libres ou classiques: par exemple, ils ont étendu à l'ensemble de ces groupes quantiques les théorèmes asymptotiques de Diaconis et Shahshahani [6] sur les traces des groupes orthogonaux et symétriques.

Dans la première partie de la thèse, le concept de groupe quantique easy est étendu au cas unitaire. Tout d'abord, nous donnons une classification de l'ensemble des groupes quantiques easy unitaires dans le cas libre et classique. Nous étendons ensuite les résultats probabilistes de Banica, Curran et Speicher au cas unitaire.

Produit en couronne libre: Le produit en couronne libre est une construction algébrique due à Bichon [4] qui associe un groupe quantique compact à un sous-groupe quantique du groupe symétrique libre pour créer un nouveau groupe quantique, d'une manière analogue au produit en couronne classique. Alors que la mesure de Haar d'un produit en couronne classique a une expression simple en fonction des mesures de Haar des groupes initiaux, il n'y a dans le cas libre aucun moyen d'obtenir une formulation explicite de l'état de Haar. Banica et Bichon [1] ont conjecturé que la loi du caractère fondamental d'un produit en couronne libre est dans certains cas la convolution multiplicative libre des lois de caractère des groupes quantiques initiaux.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à une étude plus approfondie du produit en couronne libre. Dans un premier temps, nous décrivons les entrelaceurs des représentations dans le cas particulier d'un produit en couronne libre avec le groupe symétrique libre: cette description permet également d'obtenir plusieurs résultats probabilistes. Dans un deuxième temps, nous établissons un lien entre le produit en couronne libre et les algèbres planaires: ce lien mène une preuve de la conjecture de Banica et Bichon précitée.

Frontière de Martin du graph Z: Le graphe de Young est un graphe qui encode la structure multiplicative de l'anneau des fonctions symétriques dans la base de Schur [11, 12, 9]. Cet anneau, également défini comme l'anneau commutatif universel engendré par un nombre infini et dénombrable de variables, joue un rôle important dans la théorie des représentations du groupe symétrique et du groupe unitaire. En retirant la condition de commutativité de cet anneau, on obtient un nouvel anneau non-commutatif qui a été introduit [7] comme l'anneau des fonctions symétriques non-commutatives. Un résultat fondamental est qu'on peut associer à cet anneau non-commutatif un anneau commutatif, l'anneau des fonctions quasi-symétriques, qui présente une structure combinatoire similaire à celle de l'anneau des fonctions symétriques. L'anneau des fonctions quasi-symétriques possède ainsi une base semblable à la base de Schur, la base des fonctions fondamentales quasi-symétriques.

Dans la troisième partie de la thèse, nous étudions un analogue du graphe de Young qui encode la structure multiplicative de la base des fonctions quasi-symétriques fondamentales. La frontière minimale de ce graphe a déjà été décrite par Gnedin et Olshanski [8]. Nous prouvons que la frontière minimale coïncide avec la frontière de Martin. Au cours de cette preuve, nous montrons plusieurs résultats combinatoires asymptotiques concernant les diagrammes de Young en ruban.

Références:

- [1] Teodor Banica and Julien Bichon. Free product formulae for quantum permutation groups. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 6(03):381–414, 2007.
- [2] Teodor Banica, Stephen Curran, and Roland Speicher. Stochastic aspects of easy quantum groups. *Probability theory and related fields*, 149(3-4):435–462, 2011.
- [3] Teodor Banica and Roland Speicher. Liberation of orthogonal lie groups. *Advances in Mathematics*, 222(4):1461–1501, 2009.
- [4] Julien Bichon. Free wreath product by the quantum permutation group. *Algebras and representation theory*, 7(4):343–362, 2004.
- [5] Benoît Collins. Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the itzykson-zuber integral, and free probability. *International Mathematics Research Notices*, 2003(17):953–982, 2003.
- [6] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. On the eigenvalues of random matrices. *Journal of Applied Probability*, pages 49–62, 1994.
- [7] Israel Gelfand, Daniel Krob, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Vladimir S Retakh, and J-Y Thibon. Noncommutative symmetric functions. *arXiv preprint hep-th/9407124*, 1994.
- [8] Alexander Gnedin and Grigori Olshanski. Coherent permutations with descent statistic and the boundary problem for the graph of zigzag diagrams. *International Mathematics Research Notices*, 2006:51968, 2006.
- [9] Sergei Kerov. The boundary of young lattice and random young tableaux. *DIMACS Ser. Discr. Math. Theor. Comp. Sci*, 24:133–158, 1996.
- [10] Sven Raum and Moritz Weber. The full classification of orthogonal easy quantum groups. *arXiv preprint arXiv:1312.3857*, 2013.
- [11] Elmar Thoma. Die unzerlegbaren, positiv-definiten klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen gruppe. *Mathematische Zeitschrift*, 85(1):40–61, 1964.
- [12] Anatolii Vershik and Sergei Kerov. Asymptotic theory of characters of the symmetric group. *Functional analysis and its applications*, 15(4):246–255, 1981.
- [13] Shuzhou Wang. Free products of compact quantum groups. *Communications in Mathematical Physics*, 167(3):671–692, 1995.
- [14] Shuzhou Wang. Quantum symmetry groups of finite spaces. *Communications in mathematical physics*, 195(1):195–211, 1998.
- [15] Moritz Weber. On the classification of easy quantum groups. *Advances in Mathematics*, 245:500–533, 2013.